Appendice E

Gli algoritmi OTF convenzionali

Allo scopo di ottenere posizionamenti precisi al livello centimetrico, è necessario utilizzare osservabili ottenute con le misure di fase per poi risolvere le ambiguità di fase incognite.
Per molte applicazioni, quest'operazione dovrebbe essere effettuata in modo rapido e preciso, sfortunatamente questi due requisiti risultano essere in conflitto tra loro, allo scopo di raggiungere il corretto equilibrio tra questi due requisiti sono stati sviluppati diversi algoritmi.

Anni	N° di documenti
1981-1984	1
1985-1989	24
1990-1994	123
1995-1999	177
Totale	325

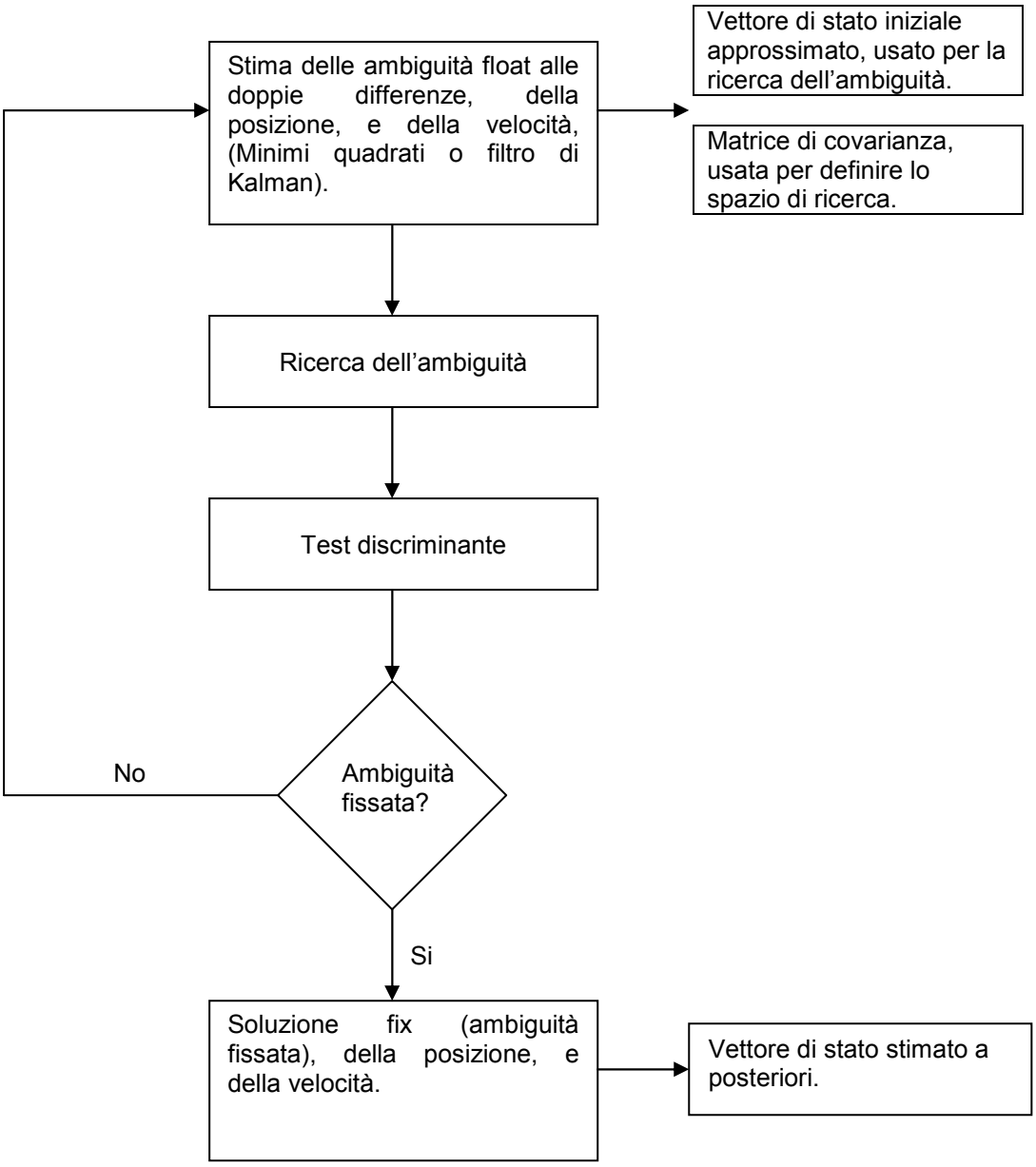
Tutte le strategie di risoluzione dell'ambiguità consistono di tre passi base (si veda il diagramma successivo):

- Determinazione di una soluzione iniziale approssimata, che generalmente viene ottenuta utilizzando una misura di fase ottenuta da una soluzione, arrotondata, di codice, o una soluzione *float* ricavata mediante un filtro di Kalman.
- Strategia di ricerca (stima degli interi dell'ambiguità), che può essere effettuata sia nel dominio della posizione che nel dominio dell'ambiguità.
- Risoluzione dell'ambiguità, per ottenere la soluzione *fix*, se vi sono più set d'interi candidati, può essere necessario un test distintivo allo scopo di determinare quale fra essi è quello corretto.

Si può notare che vari differenti algoritmi sono stati scoperti per ognuno di questi passi. Qualunque sia la tecnica di risoluzione gli algoritmi usati per le soluzioni *float* e *fix* sono riutilizzabili. D'altra parte la procedura di stima delle ambiguità intere dipende dalla specifica tecnica di ricerca adottata.
Prima di descrivere i vari metodi di risoluzione differenti, si procederà con una descrizione generale delle due più comuni tecniche di stima (minimi quadrati e filtro di Kalman).

Stima ai minimi quadrati

Come già detto, è richiesto un punto di partenza per la ricerca delle ambiguità, si veda, a tale proposito, la parte superiore del diagramma sottostante:



Parliamo dell'equazione parametrica dei minimi quadrati, assumendo che <u>i parametri incogniti siano correlati alle osservabili utilizzando il modello parametrico: $l = f(x)$.</u>
Il vettore di stato x è correlato al vettore d'osservazione l utilizzando le equazioni:

$$\hat{x} = x^0 + \hat{\delta}$$

$$\hat{\delta} = -N^{-1}u = -\left(A^T C_1^{-1} A\right)^{-1} A^T C_1^{-1} w$$

$$w = f\left(x^0\right) - 1$$

la matrice disegno A è una matrice Jacobiana di derivate parziali della funzione (modello parametrico) in funzione delle x incognite del vettore di stato:

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{(x^0,1)}$$

Mentre le correzioni alle osservazioni, chiamate residui, sono date da $\hat{r} = A\hat{\delta} + w$ ed utilizzando la legge di covarianza, la matrice di covarianza diventa:

$$C_x = N^{-1} = \left(A^T C_1^{-1} A\right)^{-1}.$$

Imponendo che n sia il numero di osservazioni e che u sia il numero di incognite, i parametri sono definiti come:

- $\hat{x}$ è il vettore di stato stimato (u*1),
- x^0 è il vettore iniziale, approssimato, di stato,
- $\hat{l}$ è il vettore delle osservazioni (n*1),
- A è la matrice di disegno (n*1),
- $\hat{\delta}$ è il vettore delle correzioni (u*1),
- N è la matrice normale (u*u),
- w è il vettore di sottochiusura (n*1),
- $\hat{r}$ è il vettore dei residui (n*1),
- $C_{\hat{x}}$ è la matrice di covarianza dello stato (u*u),
- C_l è la matrice di covarianza delle osservazioni (n*n).

Se il modello matematico non è lineare (come nel caso delle osservazioni GPS), è necessario linearizzare il normale vettore di stato x^0 ed iterare la soluzione finchè il vettore delle correzioni $\hat{\delta}$ converge a zero.
I principali assunti del metodo dei minimi quadrati sono:

- Staticità del vettore di stato (cioè non cambia nel tempo).
- Tutti gli errori sono di natura Gaussiana (sono cioè approssimati con una distribuzione di Gauss).
- Si applica in genere quando il problema è sovradeterminato, cioè quando n>u.

Nel diagramma precedentemente mostrato si può notare come il metodo dei minimi quadrati (o il filtro di Kalman) venga applicato per risolvere le ambiguità. Se gli stati dell'ambiguità non sono stati fissati, essi, insieme agli stati della velocità e della posizione devono essere stimati. Tutto è riferito alla soluzione *float*. Una volta che gli interi sono stati determinati (parte bassa del diagramma), il metodo dei minimi quadrati (o il filtro di Kalman) deve essere ancora implementato per ottenere una soluzione ottimale per la velocità e la posizione.

Filtro di Kalman[1]

Il filtro di Kalman può essere pensato come un'estensione del metodo dei minimi quadrati da un problema statico ad uno cinematica, si consideri infatti che la posizione del rover e gli errori dominanti variano in funzione del tempo. Perciò, il vettore di stato non può essere considerato costante come nel caso dei minimi quadrati, la sua variazione nel tempo è consentita. Le equazioni di aggiornamento sono:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right)$$

$$P_k = \left(I - K_k H\right)P_k^-$$

$$K_k = P_k^- H^T \left(HP_k^- H^T + R\right)^{-1}$$

dove K_k è la matrice guadagno (u*n) al tempo t_k, minimizza la covarianza dell'errore di stima a posteriori;
I è la matrice identità (u*u);
$^-$ denota una matrice o un vettore prima dell'aggiornamento delle misure;
z_k è la misura attuale, cioè al tempo t_k;
P_k covarianza dell'errore di stima a posteriori;
R covarianza del rumore di misura;
H matrice disegno, lega x_k a z_k.

Le equazioni di previsione sono:

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1}$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

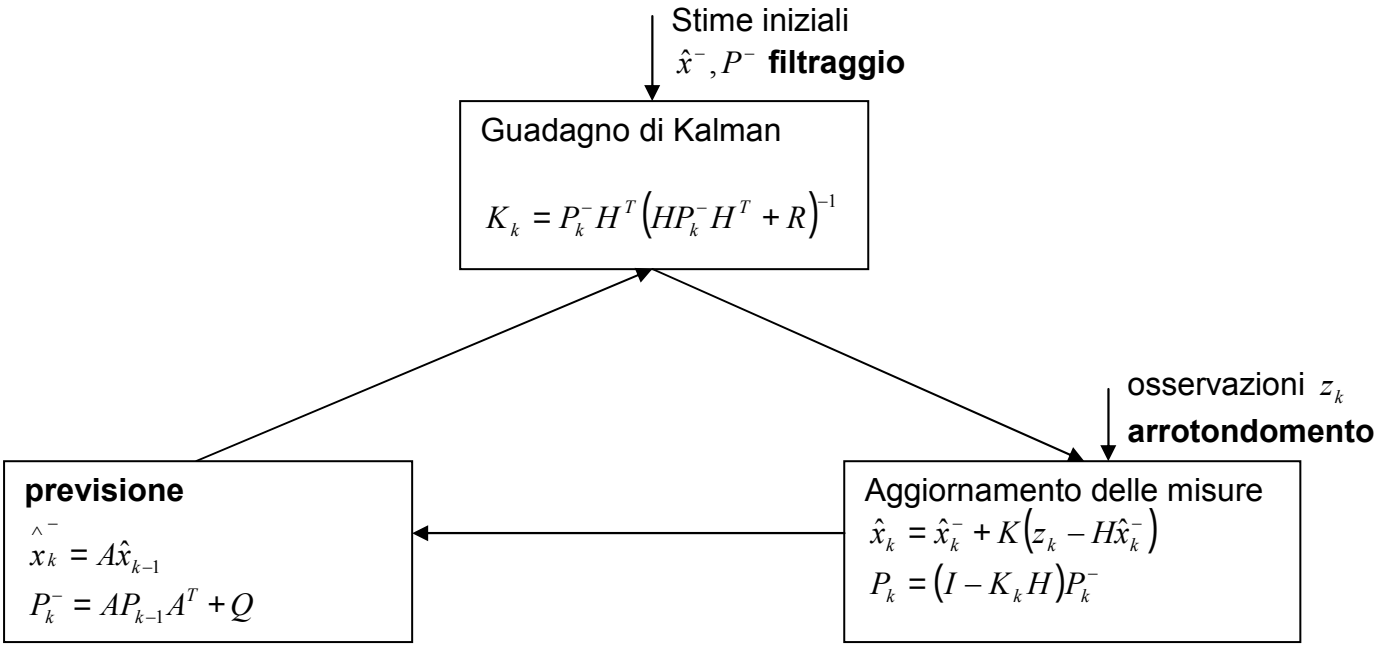
dove A è la matrice di transizione (u*u), lega x_{k-1} ad x_k;
Q è la covarianza del rumore di processo (u*u).

Prima di vedere come vengono implementate tali equazioni, commentiamo concettualmente ciò che avviene, il filtro di Kalman consiste in tre passi:

1. **Previsione** - la posizione al tempo t_k viene prevista sulla scorta dell'ultima misura al tempo t_{k-1}.
2. **Filtraggio** - tutte le osservazioni prese al tempo t_k vengono filtrate, cioè quelle meno precise vengono scartate, ciò che rimane sono le posizioni risultanti al tempo t_k.
3. **Arrotondamento** - la posizione al tempo t_k viene stimata a posteriori, cioè quando il filtraggio è stato completato e tutte le misure sono state post-processate al tempo t_{k+1}.

[1] Per ulteriori dettagli si vada all'Appendice D

Infine le equazioni vengono così implementate:



Sfruttando il modello cinematico si possono ricavare posizioni stimate anche in condizioni di insufficienza di dati, per esempio quando quando sono visibili solo due satelliti
Per molti problemi di navigazione, le dinamiche dei sistemi vengono modellate utilizzando un percorso casuale o un modello di Gauss-Markov, perciò, la matrice di transizione viene facilmente ottenuta. Sfortunatamente, il rumore di processo non è facile da modellizzare e deve essere ricavato frequentemente con metodi empirici.

Soluzione float

Una parte importante di ogni algoritmo che fa affidamento sulla matrice di covarianza in uscita è la soluzione *float* dell'ambiguità, adesso vedremo cosa succede applicando il filtro di Kalman nella risoluzione. Affinché l'algoritmo di ricerca includa il set di interi corretto, è importante che la matrice di covarianza di stato rifletta accuratamente gli errori presenti negli stati stimati. Naturalmente questo può essere problematico in quanto errori come il *multipath*, gli errori atmosferici residui ed i residui degli errori d'orbita non sono Gaussiani e potrebbero dar luogo ad una covarianza troppo pessimistica o troppo ottimistica.
Prima di descrivere tali dettagli, sviluppiamo matematicamente la soluzione *float*.
Applicando un modello di velocità costante è possibile ottenere il vettore di stato:

$$x = \left[\delta\phi, \delta\lambda, \delta h, \delta\dot{\phi}, \delta\dot{\lambda}, \delta\dot{h}, \delta N_1, \delta N_2, \cdots, \delta N_n\right]^T$$

dove $\delta\phi, \delta\lambda, \delta h$ sono rispettivamente le correzioni degli stati della latitudine, longitudine ed altitudine. Gli stessi termini con il punto sopra rappresentano le derivate rispetto al tempo (in questo caso le velocità), e δN è una correzione per lo stato delle ambiguità alle doppie differenze. Dato che le dinamiche sono state modellate usando un percorso casuale, la matrice di transizione viene facilmente derivata come:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove Δt è la differenza tra un tempo futuro ed il tempo attuale. Come già detto, molti errori incontrati nelle osservazioni GPS non sono di natura Gaussiana. Un modo per evitare che il filtro di Kalman diventi eccessivamente ottimistico consiste nell'aggiungere del rumore di processo nella stima degli stati dell'ambiguità, della posizione e della velocità ponendolo un po' più grande del suo valore teorico. Cioè in modo molto ingegneristico viene presa in considerazione l'ipotesi peggiore, il che potrebbe non essere ottimale per una matrice di covarianza conservativa, ma sarebbe molto peggio commettere degli errori nella risoluzione delle ambiguità intere.
Può anche essere utile, adattare i rumori di processo con i dati disponibili. Il filtraggio adattivo può essere ottenuto in modo teorico oppure utilizzando un set di algoritmi derivati euristicamente. Nel caso del GPS la soluzione *float* l'ultimo metodo può essere implementato trattando vari set di dati e determinando i migliori valori di rumore variando il rumore del ricevitore e le condizioni di *multipath* in funzione dei *baseline*.
Altrimenti i valori di rumore da aggiungere agli stati di velocità possono essere derivati valutando le variazioni negli stati della velocità delle epoche precedenti. Variazioni significative delle velocità possono essere dovute all'accelerazione, perciò, una quantità significativa di rumore di processo deve essere aggiunta. D'altra parte se gli stati della velocità non variano da epoca ad epoca, una piccola quantità di rumore di processo deve essere aggiunta. Valori tipici per il rumore di processo aggiunto agli stati di posizione e velocità per aggiornamenti di un secondo sono rispettivamente 0.2 m^2 e 0.25 m^2/s^2.
Un modo per individuare gli errori grossolani consiste nell'osservare la sequenza di innovazione e la covarianza delle innovazioni:

$$In = z_k - H\hat{x}_k^-$$

$$P_{In} = HC_{\hat{x}k}^- H^T + P_{z_k}$$

dove In è la sequenza d'innovazione (con i residui previsti) e
P_{In} è la covarianza della sequenza d'innovazione.

Quindi, se la misura della sequenza d'innovazione è più grande di una certa soglia (spesso viene utilizzato il valore 3σ, derivato dalla matrice C_{In}), l'osservazione corrispondente può essere alleggerita o completamente rifiutata.

Procedure OTF esistenti

Come precedentemente accennato, attualmente le procedure OTF per la risoluzione dell'ambiguità. La maggior parte di esse consistono per lo più di tre punti principali. Essi sono:

1. Soluzione *float,*
2. Stima degli interi dell'ambiguità e successiva scelta del set migliore,
3. Soluzione *fix*.

Ogni tecnica ha una differente efficienza computazionale nonostante abbiano aspetti e caratteristiche comuni, ad esempio si può considerare che quando viene effettuata una ricerca all'interno di un dominio essa è fondamentalmente basata sulla minimizzazione delle forme quadratiche dei residui. Questa minimizzazione viene effettuata con il metodo dei minimi quadrati vincolando ad interi le ambiguità ottenute.
La funzione obbiettivo è una delle caratteristiche comuni delle varie tecniche, essa serve ad ottenere la minimizzazione, può essere ottenuta tramite due approcci:

- Singola epoca (o istantanea),
- Multi epoca.

Nel primo caso vengono utilizzate le osservazioni di una singola epoca, nel secondo caso si usano varie osservazioni sequenziali nel calcolo della forma quadratica dei residui.
Il tasso di successo (scelta dei parametri di ambiguità corretti) è maggiore nell'approccio multi epoca, il che è dovuto alla differenza tra minimo locale e minimo globale. Quando le osservazioni sono significativamente contaminate da *multipath*, effetti atmosferici residui, errori d'orbita e via dicendo, il minimo locale ottenuto utilizzando le osservazioni di un'epoca è propenso ad essere errato.
Il minimo globale invece, viene determinato usando varie osservazioni sequenziali su intervalli temporali relativamente lunghi, e tende ad essere più corretto.

La soluzione iniziale (float)

La soluzione iniziale è il primo punto nella risoluzione di ambiguità come indicato nel diagramma all'inizio del paragrafo, fornisce due parti di un'importante informazione. La prima parte è <u>un vettore di stato approssimato, che può essere usato come punto di partenza per la ricerca dell'ambiguità</u>. La seconda parte dell'informazione proviene dalla <u>matrice di covarianza, che è usata comunque per definire una zona di ricerca dell'ambiguità</u>.
La soluzione generalmente deriva da due modi differenti; un arrotondamento di fase della soluzione ottenuta da misure di codice oppure usando la soluzione del filtro di Kalman.
Per le situazioni in cui non è possibile un'istantanea risoluzione delle ambiguità, la soluzione del filtro di Kalman può essere preferibile a quella ottenuta dai minimi quadrati a partire da arrotondamenti delle misure di codice, così come si può far uso delle precedenti informazioni.

Le procedure di ricerca

Il secondo punto mostrato nel diagramma all'inizio del paragrafo, è dato dalla procedura di ricerca attraverso tutte le combinazioni possibili di ambiguità, determinando quali sono quelle plausibili.
Le tecniche di risoluzione dell'ambiguità si distinguono fondamentalmente per la procedura di ricerca, esse possono essere distinte in tre classi:

1. Risoluzione nel dominio di misura (viene usato il metodo dei minimi quadrati per gli arrotondamenti),
2. Risoluzione nel dominio delle coordinate,
3. Risoluzione nel dominio dell'ambiguità (viene usato il filtro di Kalman per gli arrotondamenti).

Alla prima classe appartengono le tecniche di risoluzione più semplici che usano i *pseudorange* dei codici C/A e P direttamente per determinare le ambiguità delle corrispondenti misure di fase osservate. Ciò nonostante la precisione degli *pseudorange* di C/A e persino di P non è buona a sufficienza da determinare le ambiguità intere.
La seconda classe di algoritmi include la prima tecnica di risoluzione che in assoluto venne scoperta, la AFM (Ambiguity Function Method, trad. Metodo Funzione Ambiguità). Questa tecnica usa solo i valori frazionari delle misure di fase istantanee, così facendo la funzione ambiguità non è affetta da *cycle slip*. A dispetto dei significativi miglioramenti, recentemente ottenuti, rispetto all'algoritmo originale, la tecnica fornisce un'efficienza di calcolo relativamente bassa e conseguentemente è interessante solo da un punto di vista storico.
La terza classe comprende il gruppo di tecniche più abbondante basate sulla teoria dei minimi quadrati.

Riportiamo di seguito una tabella che descrive brevemente tali tecniche:

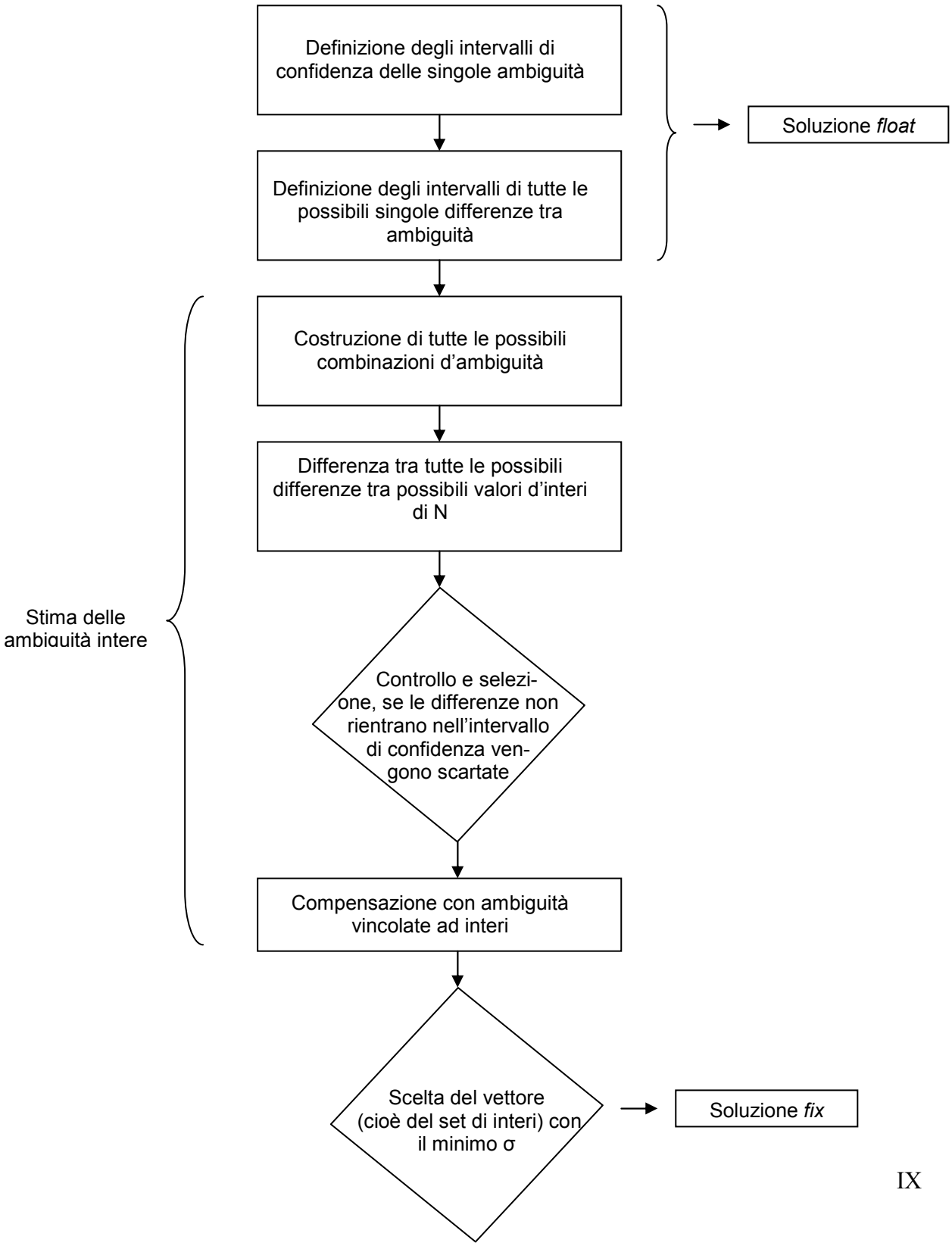
Tecnica	Principale/i Autore/i	Metodo di ricerca dell'ambiguità	Metodo di trattamento dei dati	Metodo di trattamento dello spazio di ricerca
LSAST	Hatch	Indipendente	Singola epoca	Nessuno
FARA	Frei e Beutler	Tutti	Multi epoca	Condizionale
Decomposizione Cholesky modificata	Euler e Landau	Tutti	Multi epoca	Nessuno
LAMBDA	Teunissen	Tutti	Multi epoca	Trasformazione /Condizionale
Spazio Nullo	Martin-Neira	Indipendente	Singola epoca	Trasformazione
FASF	Chen e Lachapelle	Tutti	Multi epoca	Condizionale
OMEGA	Kim e Langley	Indipendente	Singola/Multi epoca	Trasformazione /Condizionale

Come si può notare alcune tecniche di ricerca considerano tutti i parametri di ambiguità, altre invece considerano solo quelli indipendenti (da fattori esterni, cioè dagli errori), in quest'ultimo caso è possibile ottenere una soluzione unica per il sistema (costituito dalle

equazioni d'osservazione). I parametri dipendenti d'ambiguità vengono determinati una volta che quelli indipendenti sono noti, generalmente il che è efficiente nella creazione dello spazio di ricerca dell'ambiguità, ma l'efficienza di calcolo non è elevata quanto ci si aspetta a causa del carico computazionale dei parametri dipendenti.

FARA - Fast Ambiguity Resolution Approach

Un'alternativa a tutt'oggi valida è la cosiddetta tecnica FARA descritta da Frei e Beutler nel 1990 e da Erickson nel 1992. Questo metodo consiste nel calcolo della soluzione *float* e nell'analisi delle combinazioni di ambiguità.



Adesso commentiamo dettagliatamente il precedente diagramma a blocchi, sintetizzando le fasi principali del trattamento dei dati.

Fase preliminare (singola epoca) - si consideri l'equazione alle doppie differenze:

$$\phi_{AB}^{ij}(t) = \frac{1}{\lambda}\rho_{AB}^{ij}(t) + N_B^{ij}$$

(si tenga conto del fatto che qui gli indici i e j rappresentano i satelliti i e j, per ulteriori si vada a pag. 22)

relativa all'epoca t. In quest'equazione sono presenti due incognite $\rho_{AB}^{ij}(t)$ ed N_{AB}^{ij}, per ottenere una stima iniziale (la cosiddetta stima a priori) di N devo sostituire nell'equazione uno *pseudorange* dato da una misura di codice alla stessa epoca t, arrotondato ai minimi quadrati per migliorarne la precisione. Così facendo ottengo un'equazione in un'incognita → sono in grado di ricavare una N approssimata, essa è:

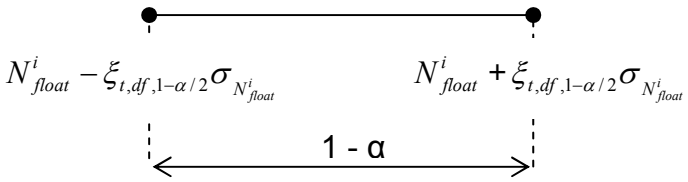
$$N_{float}^{i}$$

1. A partire da essa posso definire l'intervallo di confidenza per l'ambiguità N_{float}^{i} ad un livello di significatività α:

$$P\left(N_{float}^{i} - \xi_{t,df,1-\alpha/2}\sigma_{N_{float}^{i}} \le N_{\text{int}}^{i} \le N_{float}^{i} + \xi_{t,df,1-\alpha/2}\sigma_{N_{float}^{i}}\right) = 1-\alpha \qquad (i = 1,\ldots,r)$$

   Per intervallo di confidenza si intende un intervallo di validità per le N stimate, avente per estremi $N_{float}^{i} - \xi_{t,df,1-\alpha/2}\sigma_{N_{float}^{i}}$ ed $N_{float}^{i} + \xi_{t,df,1-\alpha/2}\sigma_{N_{float}^{i}}$, la cui estensione è pari ad 1 - α, dove 0 < 1 – α ≤ 0,95, per cui P( ) ≤ 95%.
   L'operazione viene iterata per diverse epoche, in modo da definire gli intervalli di confidenza delle singole ambiguità, si tenga conto però del fatto che: $\forall t, N_{float}^{i} \exists! P(\ldots), i = (1,\ldots,r)$.

2. Si definiscono gli intervalli di confidenza di tutte le possibili singole differenze tra ambiguità N (sono $\frac{r(r+1)}{2}$). Per definire un intervallo di confidenza per una singola ambiguità devo considerare due epoche: quella relativa all'ambiguità i^esima^, quella relativa all'ambiguità j^esima^, quindi se prima stavo ragionando su una singola epoca ora sto ragionando in multi-epoca.



$$P\left(N_{float}^{ij} - \xi_{t,df,1-\alpha/2}\sigma_{N_{float}^{ij}} \le N_{\text{int}}^{ij} \le N_{float}^{ij} + \xi_{t,df,1-\alpha/2}\sigma_{N_{float}^{ij}}\right) = 1-\alpha \qquad (i, j = 1,\ldots,r)$$

dove:

- $N^{ij} = N^i - N^j$,
- $\sigma_{N^{ij}} = \sqrt{\sigma^2_{N^j} - \sigma_{N^j}\sigma_{N^i} + \sigma^2_{N^i}}$,
- 1-α è l'estensione dell'intervallo di confidenza,
- σ_N è la deviazione standard derivata dalla soluzione *float,*
- ξ_t è la distribuzione t di Student,
- df è il grado di libertà della distribuzione,
- P( ) è l'operatore di probabilità.

ove i $\sigma_{N^{ij}_{float}}$ sono derivati dalla matrice di covarianza per propagazione;

3. Si costruiscono (in teoria) tutte le possibili combinazioni dì ambiguità intere sulla base degli intervalli di confidenza; ad ogni combinazione corrisponde un vettore di lunghezza r ed i vettori sono ordinati per gruppi, tali vettori sono costituiti dai migliori interi che approssimano i valori stimati d'ambiguità; si consideri dapprima il primo gruppo: il primo vettore contiene i numeri interi più vicini ai valori reali stimati; il secondo è uguale al primo a parte l'ultimo elemento contenente il secondo intero più vicino al rispettivo valore reale stimato; il terzo è uguale al primo a parte l'ultimo elemento contenente il terzo intero più vicino al rispettivo valore reale stimato, e così via fino a scandire tutti i possibili valori interi contenuti nell'intervallo di confidenza dell'ultimo elemento del vettore, ovvero dell'ambiguità r^{esima} (vedi tabella sottostante); si passa poi al secondo gruppo: il primo vettore contiene i numeri interi più vicini ai valori reali stimati ad eccezione del penultimo elemento contenente il secondo intero più vicino al rispettivo valore reale stimato; gli altri vettori si definiscono come nel primo gruppo facendo variare l'ultimo elemento (vedi tabella sottostante); il terzo gruppo sì definisce analogamente al secondo variando nuovamente il penultimo elemento su terzo intero più vicino e così via fino ad esaurire tutte le possibili combinazioni;

Intervalli di confidenza	
-0.91∓1.03	
2.76∓1.41	2 N^{reale} 3
1.05∓1.10	0 1 N^{reale} 2

Intervalli di confidenza	1° gruppo 1° vettore	1° gruppo 2° vettore	1° gruppo 3° vettore
-0.91 ∓ 1.03	-1	-1	-1
2.76 ∓ 1.41	3	3	3
1.05 ∓ 1.10	1	2	0

2° gruppo 1° vettore	2° gruppo 2° vettore	2° gruppo 3° vettore
-1	-1	-1
2	2	2
1	2	0

Gruppi di combinazioni di interi definito dalla tecnica FARA

complessivamente si definiscono n vettori mediante un ciclo in cui l'ultimo elemento varia più velocemente e il primo più lentamente di ogni altro, con:

$$n = \prod_{1}^{r}{}_{i}\, n_i$$

ove n_i è il numero di interi presenti nell'intervallo di confidenza relativo all'ambiguità i^{esima};

4) Si formano (teoricamente) tutte le possibili differenze tra gli elementi di ogni vettore, cioè tra possibili valori interi N^i delle ambiguità, secondo l'ordine seguente:

$$N^1 - N^2, N^1 - N^3, N^2 - N^3, N^1 - N^4, N^2 - N^4, N^3 - N^4, \ldots, N^{r-1} - N^r$$

e per ognuna si controlla se è compresa nell'intervallo di confidenza della corrispondente differenza di ambiguità; se lo è si calcola la differenza successiva, altrimenti si eliminano dal trattamento tutti i vettori di ambiguità intere che originano questa differenza.

Si noti a questo punto che è conveniente eseguire contemporaneamente i passi 3 e 4 nel senso che dopo aver formato il primo vettore del primo gruppo si procede subito al calcolo delle differenze per evitare di formare altri vettori che contengono differenze non accettabili; solo se tutte le differenze generate a partire da questo vettore sono compatibili con gli intervalli di confidenza, si passa al vettore successivo e così via. Si comprende che il numero dei vettori che si formano in realtà è molto inferiore a quello teorico.

5) Si eseguono tante compensazioni con ambiguità vincolate a valori interi quanti sono i vettori selezionati con la precedente ricerca;

6) Si sceglie il vettore a cui corrisponde la compensazione con il minimo sigma zero stimato $\hat{\sigma}_{0m}$ solo se è l'unico che soddisfa le seguenti condizioni:
   - la differenza tra $\hat{\sigma}_{0m}$ ed il sigma zero stimato nella compensazione iniziale in cui si sono stimati i valori reali delle ambiguità non deve essere significativa dal punto di vista statistico, nell'ipotesi che questi due sigma zero siano indipendenti; tale ipotesi

non è però realistica poiché entrambi discendono dal medesimo insieme di osservazioni;
- la differenza tra i vettori dei parametri geometrici stimati nella compensazione iniziale ed in quella finale non deve essere significativa.

L'algoritmo può essere ulteriormente velocizzato se si impiegano ricevitori a doppia frequenza e si ritiene che le basi siano abbastanza corte di modo che l'effetto ionosferico si possa eliminare per differenza, ciò è in genere giustificato quando si intendono fissare a valori interi le ambiguità. Infatti, sotto tale ipotesi, applicando le differenze doppie alla combinazione di fasi, si ottiene una quantità costante nel tempo:

$$\nabla\Delta\Phi^{s}_{r_{12}} = \nabla\Delta\Phi^{s}_{r_{L1}} - \frac{f_{L1}}{f_{L2}}\nabla\Delta\Phi^{s}_{r_{L2}} =$$

$$= -\nabla\Delta N^{float}_{L1} + \nabla\Delta\tau^{s}_{r} f_{L1} + \nabla\Delta\frac{a}{cf_{L1}} + \nabla\Delta\delta t^{s}_{r} f_{L1} - \frac{f_{L1}}{f_{L2}}\left(-\nabla\Delta N^{float}_{L2} + \nabla\Delta\tau^{s}_{r} f_{L2} + \nabla\Delta\frac{a}{cf_{L2}} + \nabla\Delta\delta t^{s}_{r} f_{L2}\right) =$$

$$= -\left(\nabla\Delta N^{float}_{L1} + \frac{f_{L1}}{f_{L2}}\nabla\Delta N^{float}_{L2}\right) = -\left(N^{fix}_{L1} + \frac{f_{L1}}{f_{L2}} N^{fix}_{L2}\right); (*)$$

stimando la media delle osservazioni $\nabla\Delta\Phi_{12}$ ed il loro scarto quadratico medio si ricava l'ordinata all'origine della retta:

$$N^{fix}_{L1} = \frac{f_{L1}}{f_{L2}} N^{fix}_{L2} - \nabla\Delta\Phi_{12}$$

che rappresenta il legame tra le ambiguità relative alle due frequenze e si definisce una regione di confidenza intorno ad essa.
D'altra parte, non è necessario formare esplicitamente le equazioni di osservazione in funzione della combinazione (*), perché le stime reali delle ambiguità N^{fix}_{L1} e N^{fix}_{L2} sono già disponibili dopo la prima compensazione; quindi, si utilizza direttamente la relazione (*) per calcolare $\nabla\Delta\Phi_{12}$ e si ricava il rispettivo intervallo di confidenza sulla base della matrice di covarianza dei parametri applicando nuovamente la legge di propagazione:

$$P\left(\left[\nabla\hat{\Delta}\Phi_{12i} - \xi_{t,df,1-\alpha/2}\hat{\sigma}_{\nabla\Delta\Phi}, \nabla\hat{\Delta}\Phi_{12i} + \xi_{t,df,1-\alpha/2_f}\hat{\sigma}_{\nabla\Delta\Phi}\right]\right) = 1-\alpha \qquad (i = 1,\ldots,r)$$

questo intervallo di confidenza viene utilizzato insieme agli altri precedentemente definiti per selezionare i vettori di interi corrispondenti alle combinazioni di ambiguità accettabili. Lo svantaggio del metodo FARA comparato all'AFM consiste nel fatto che è affetto da *cycle slip*. D'altra parte, dato che la FARA effettua la ricerca all'interno del dominio di ambiguità, la griglia di possibilità non è così densa come accade per l'AFM, quindi il numero di punti che devono essere cercati è molto più basso.