Appendice D

Introduzione al filtro di Kalman

Nel 1960 R.E. Kalman pubblicò un suo famoso documento in cui descriveva una soluzione ricorsiva al problema del filtraggio lineare dei dati discreti. Da allora, grazie ai grandi progressi dell'informatica, il *filtro di Kalman* è stato oggetto di ricerche estensive e di applicazioni, in particolare nel campo della navigazione autonoma o assistita.

Il filtro di Kalman è un insieme di equazioni matematiche che forniscono una risoluzione computazionale (ricorsiva) più efficiente di quella ottenuta con il metodo dei minimi quadrati. Il filtro è molto potente sotto vari aspetti: supporta la stima degli stati passati, presenti e futuri, e può farlo persino quando la natura precisa del sistema modellato è sconosciuta.

Filtro di Kalman discreto - Il processo di stima

Il filtro di Kalman tratta il problema generale della stima dello stato $x \in R^n$ di un processo discreto controllato temporalmente e governato da una equazione differenziale (lineare) stocastica:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1} \qquad \text{D.1}$$

con una misurazione $z \in R^m$ che vale:

$$z_k = Hx_k + v_k \qquad \text{D.2}$$

Le variabili casuali w_k e v_k rappresentano il rumore di processo e di misurazione rispettivamente. Si assume che esse siano indipendenti l'una dall'altra, bianche, e con distribuzioni di probabilità normali:

$$p(w) \approx N(0, Q) \qquad \text{D.3}$$

$$p(v) \approx N(0, R) \qquad \text{D.4}$$

In pratica la *matrice di covarianza del rumore di processo Q* e la *matrice di covarianza del rumore di misura R* possono cambiare ad ogni istante di tempo discreto o ad ogni misurazione: ciò nonostante qui verranno considerate costanti.

La matrice A di dimensioni nxn, nell'equazione D.1, pone in relazione lo stato x del precedente passo temporale (discreto) k-1 allo stato dell'attuale passo k, in assenza di una funzione guida u_k e del rumore del processo w_{k-1}. Si noti che in pratica A può cambiare ad ogni passo temporale, si assume però che sia costante.
La matrice B di dimensioni nx1 lega l'ingresso opzionale di controllo $u \in R^l$ allo stato x.

La matrice H di dimensioni mxn, nell'equazione di misurazione D.2, lega lo stato x_k alla misurazione z_k. In pratica H può cambiare ad ogni passo temporale o ad ogni misurazione, noi però la consideriamo costante.

Le origini computazionali del filtro

Si definisce $\hat{x}_k^-$ lo stato stimato a priori al passo k, data la conoscenza a priori del processo al passo k, e $\hat{x}_k \in R^n$ è lo stato stimato a posteriori dell passo k, data la misura z_k. Si possono definire gli errori di stima a priori ed a posteriori rispettivamente come:

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k$$

La covarianza dell'errore di stima a priori è quindi pari a:

$$P_k^- = E\left[e_k^- e_k^{-T}\right] \qquad \text{D.5}$$

Mentre la covarianza dell'errore di stima a posteriori è pari a:

$$P_k = E\left[e_k e_k^T\right] \qquad \text{D.6}$$

derivando tali equazioni per il filtro di Kalman si perviene ad un'equazione che computa stato $\hat{x}_k$ stimato a posteriori come una combinazione lineare della stima a priori $\hat{x}_k^-$ e ad una differenza pesata fra la misurazione attuale z_k e la misurazione prevista $H\hat{x}_k^-$ come mostrato dall'equazione qui sotto, alcune giustificazioni per tale equazione sono date nel paragrafo sulle origini probabilistiche del filtro.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right) \qquad \text{D.7}$$

La differenza $\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right)$ nell'equazione D.7 è detta innovazione della misura o residuo. Il residuo riflette la discrepanza tra la misurazione prevista $H\hat{x}_k^-$ e l'attuale misura z_k. Un residuo nullo è significativo del fatto che le due misure sono in completo accordo.

La matrice K di dimensioni nxm, nell'eq. D.7, è detta *guadagno* o *fattore armonizzante* ed è stata scelta in modo che minimizzi l'errore a posteriori di covarianza dell'equazione D.6. Questa minimizzazione può essere portata a termine tramite una prima sostituzione dell'equazione D.7 nella precedente definizione di e_k. Successivamente sostituendo il risultato nell'equazione D.6, vengono migliorati i valori attesi indicati, prendendo la derivata della traccia del risultato rispetto a k, uguagliandola a zero, e poi risolvendo rispetto a K.

Una forma della K risultante che minimizza l'equazione D.6 è data da[1]:

$$K_k = P_k^- H^T \left(HP_k^- H^T + R\right)^{-1} = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R} \qquad \text{D.8}$$

Osservando l'equazione D.8 si può notare che se la covarianza dell'errore di misurazione R tende a zero, il fattore armonizzante K influenza pesantemente il residuo. Specificatamente:

$$\lim_{R \to 0} K_k = H^{-1}$$

D'altra parte, se la covarianza dell'errore stimato a priori P_k^- tende a zero, il fattore armonizzante K influenza il residuo in modo meno significativo. Specificatamente:

$$\lim_{P_k^- \to 0} K_k = \frac{0}{R} = 0$$

Un altro modo di pensare al peso di K sta nel considerare che se la covarianza dell'errore di misura tende a zero, la misura attuale z_k è ancor più "vera", mentre la misurazione prevista $H\hat{x}_k^-$ lo è ancor di meno. D'altra parte, quando la covarianza dell'errore di stima P_k^- tende a zero, la misura attuale z_k è meno vera, mentre la misurazione prevista $H\hat{x}_k^-$ lo è molto di più.

Le origini probabilistiche del filtro

Una giustificazione all'esistenza della D.7 è radicata nella *probabilità* che la stima a priori $\hat{x}_k^-$ è condizionata da tutte le misurazioni a priori z_k. Per ora è sufficiente considerare che il filtro di Kalman ritiene i primi due momenti dello stato di distribuzione,

$$E[x_k] = \hat{x}_k$$
$$E\left[(x_k - \hat{x}_k) - (x_k - \hat{x}_k)^T\right] = P_k.$$

Lo stato stimato a posteriori D.7 riflette il significato (il primo momento) dello stato di distribuzione - esso è distribuito normalmente se le condizioni D.3 e D.4 sono verificate. La covarianza dell'errore stimato a posteriori D.6 riflette la varianza dello stato di distribuzione (il secondo momento non-centrale).
In altre parole:

$$p(x_k \mid z_k) \approx N\left(E[x_k], E\left[(x_k - \hat{x}_k) - (x_k - \hat{x}_k)^T\right]\right) = N(\hat{x}_k, P_k).$$

[1] Tutte le equazioni del filtro di Kalman possono essere algebricamente manipolate in varie forme. L'equazione D.8 rappresenta il guadagno di Kalman in una delle sue forme più popolari.

L'algoritmo[2] del filtro di Kalman discreto

Questo paragrafo inizia con una visione d'insieme che copre le operazioni "di alto livello" di una forma del filtro di Kalman discreto. Dopodiché l'attenzione verrà focalizzata sulle specifiche equazioni e sul loro uso in questa versione del filtro.

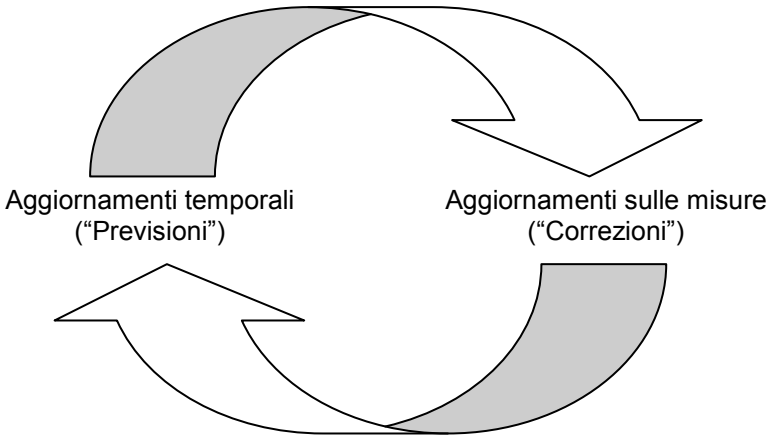
Il filtro di Kalman stima un processo mediante l'uso di una forma di controllo a retroazione (feedback): il filtro stima lo stato del processo durante alcune epoche ed ottiene risultati sotto forma di misure (rumorose).
Le equazioni del filtro possono appartenere a due classi:

- equazioni che aggiornano i tempi
- equazioni che aggiornano le misure

Le equazioni che aggiornano i tempi hanno il compito di proiettare in avanti (nel tempo) lo stato attuale e la stima della covarianza dell'errore, per ottenere la stima a priori per il passo temporale successivo.

Le equazioni che aggiornano le misure sono responsabili della retroazione: infatti incorporando una nuova misura nella stima a priori si ottiene una stima migliorata a posteriori.

Le equazioni che aggiornano i tempi possono anche essere pensate come equazioni di previsione, mentre le equazioni che aggiornano le misure possono essere pensate come equazioni di correzione. E' certo che l'algoritmo finale di stima assomiglia ad un algoritmo di previsione e correzione per risolvere problemi numerici come mostrato in figura:



Nella figura in alto viene descritto il ciclo del filtro di Kalman, gli aggiornamenti temporali proiettano l'attuale stato stimato in avanti nel tempo, gli aggiornamenti sulle misure correggono la stima proiettata tramite la misura attuale.

[2] L'origine della parola algoritmo risale a Muhammad ibn Musa al-Kharezemi, matematico arabo dell'inizio del IX secolo. Oggi per algoritmo si intende una *procedura generale* in grado di risolvere problemi di una certa classe, caratterizzata dalle seguenti proprietà: 1) è formata da una successione di istruzioni elementari (cioè non ulteriormente decomponibili in istruzioni più semplici); 2) tale successione contiene un numero finito di istruzioni; 3) la successione è sequenzialmente determinata senza alcuna ambiguità.

Le equazioni specifiche per gli aggiornamenti temporali sono:

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \qquad \text{D.9}$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \qquad \text{D.10}$$

Ancora una volta notiamo come le equazioni D.9 e D.10 proiettano le stime dello stato e della covarianza in avanti dall'istante temporale (discreto) k-1 all'istante k. Le matrici A e B sono le stesse dell'equazione D.1 mentre la matrice Q è quella utilizzata nell'equazione D.3. Le equazioni che aggiornano le misure sono:

$$K_k = P_k^- H^T \left(HP_k^- H^T + R\right)^{-1} \qquad \text{D.11}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right) \qquad \text{D.12}$$

$$P_k = \left(I - K_k H\right)P_k^- \qquad \text{D.13}$$

La prima operazione durante l'aggiornamento della misura consiste nel calcolare il guadagno di Kalman K_k. Si noti che l'equazione D.11 è uguale all'equazione D.8. Il passo successivo consiste nell'attualizzare il processo di misura per ottenere z_k, e quindi generare uno stato stimato a posteriori incorporando la misura come nell'equazione D12. Ed ancora si avrà che l'equazione D.12 coincide con la D.7, che è stata riscritta per ragioni di completezza. Il passo finale è di ottenere della covarianza dell'errore stimato a posteriori tramite la D.13.

Dopo ogni coppia di aggiornamenti sui tempi e sulle misure, il processo viene ripetuto con la precedente stima a posteriori usata per proiettare o prevedere la nuova stima a priori. Questa natura ricorsiva è una delle caratteristiche più interessanti del filtro di Kalman. Esso infatti considera ricorsivamente le condizioni della stima corrente su tutte le passate misure.

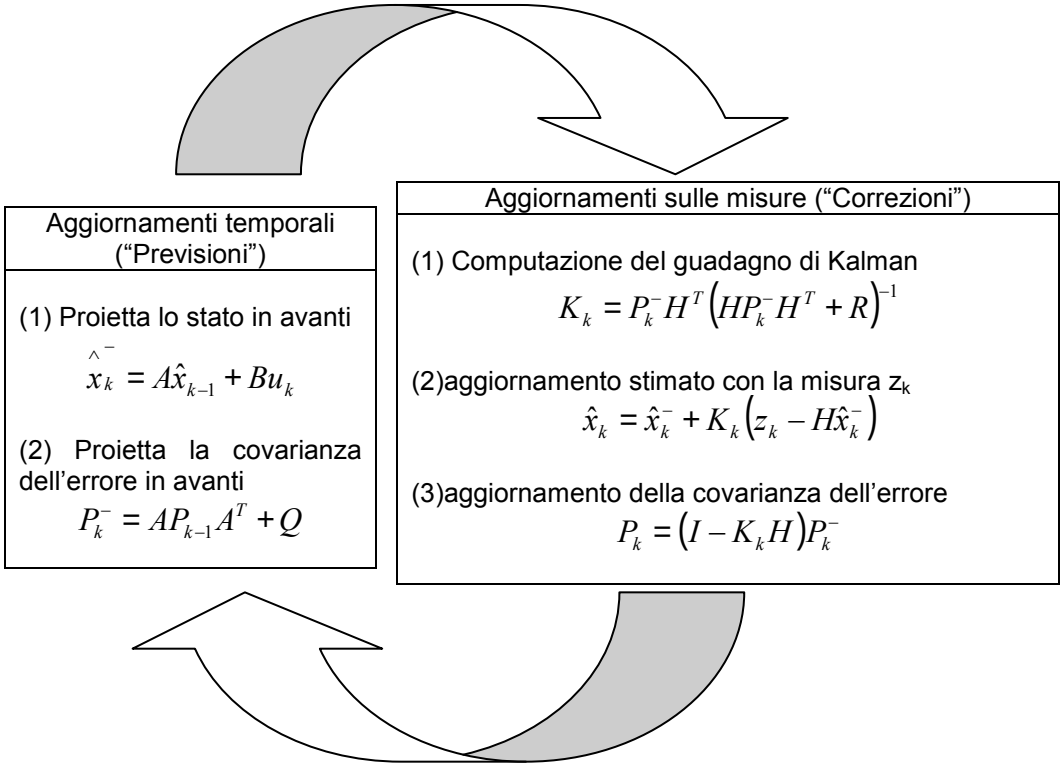
Specificazione e calibrazione del filtro

Nelle attuali implementazioni del filtro la covarianza del rumore di misura R è di solito misurata prima dell'operazione di filtraggio. Misurare la covarianza del rumore di misura R è generalmente pratico (cioè possibile) perché dobbiamo essere in grado di misurare il processo in ogni caso (mentre il filtro è operante), così dovremmo in generale essere capaci di prendere qualche misura campione (mentre il filtro non è operante), in modo da determinare la varianza del rumore di misura.

La determinazione della covarianza del rumore del processo Q è generalmente più difficile perché tipicamente non si ha la possibilità di osservare direttamente il processo che si sta stimando.
Qualche volta un modello di processo relativamente semplice (scarso) può produrre risultati accettabili se si introduce sufficiente incertezza nel processo tramite la scelta di Q. Certamente in questo caso bisogna sperare che le misure del processo siano affidabili.

In altri casi, con o senza basi razionali per la scelta dei parametri, performance superiori del filtro (statisticamente parlando) possono essere ottenute tramite calibrazione dei parametri del filtro Q e R. La calibrazione viene di solito migliorata mentre il filtro non è operante, frequentemente con l'aiuto di un distinto filtro di Kalman in un processo generalmente chiamato: "identificazione del sistema".

La figura qui sotto offre una visione completa delle operazioni del filtro, combinando il diagramma di alto livello delle figura precedente con le equazioni fin qui trattate:



Per concludere si può notare che sotto le condizioni in cui Q ed R sono di fatto costanti, sia la covarianza dell'errore stimato P_k che il guadagno di Kalman K_k si stabilizzeranno velocemente e poi rimarranno costanti. Se si verifica questo caso, tali parametri possono essere precomputati mentre il filtro non è operante, per esempio determinando un valore di stato-fisso di P_k.

Il Filtro di Kalman esteso (EKF)- Il processo di stima

Nel paragrafo precedente si è visto come il filtro di Kalman venga utilizzato per tentare di valutare lo stato $x \in R^n$ di un processo discreto controllato temporalmente, governato da un'equazione differenziale (lineare) stocastica. Se però, il processo non è lineare, oppure è la relazione di misura del processo a non essere lineare, bisogna utilizzare un filtro di Kalman linearizzante, ci si riferisce al "filtro di Kalman esteso (EKF Extended Kalman Filter).

In modo simile a quanto accade per le serie di Taylor, è possibile linearizzare la stima attorno al valore attuale stimato usando le derivate parziali del processo e le funzioni di misura persino quando abbiamo di fronte relazioni non lineari. Per farlo è necessario modificare parte del materiale precedentemente descritto. Si assume nuovamente che il processo abbia un vettore di stato $x \in R^n$ e che sia governato da un'equazione differenziale, non lineare, stocastica:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k, w_{k-1}) \qquad \text{D2.1}$$

con una misura $z \in R^m$ che vale:

$$z_k = h(x_k, v_k) \qquad \text{D2.2}$$

dove le variabili casuali w_k e v_k rappresentano ancora il rumore del processo e della misurazione, come per le D.3 e D.4.
In questo caso la funzione f non lineare nell'equazione differenziale x D2.1 lega lo stato del precedente passo k-1 allo stato del corrente passo temporale (discreto) k. Essa include come parametri ogni funzione di guida u_k e il rumore di processo w_k a media nulla. La funzione non lineare h nell'equazione di misura D2.2 lega lo stato x_k alla misura z_k.

Naturalmente non si conoscono i singoli valori dei rumori w_k e v_k ad ogni istante temporale. Comunque, il vettore di stato e la misurazione possono essere approssimati senza w_k e v_k con:

$$\tilde{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \qquad \text{D2.3}$$

$$\tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0), \qquad \text{D2.4}$$

dove $\hat{x}_k$ è la stima a posteriori dello stato (da un precedente passo k).

E' importante notare che un difetto fondamentale dell'EKF consiste nel fatto che la distribuzione (o densità nel caso continuo) delle variabili casuali non rimane a lungo normale (cioè distribuita secondo la campana di Gauss) dopo aver subito la rispettiva trasformazione non lineare.

Le origini computazionali del filtro

Per stimare un processo con differenze non lineari e relazioni di misura, iniziamo scrivendo nuove equazioni di governo che linearizzano le stime D2.3 e D2.4:

$$x_k \approx \tilde{x}_k + A\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right) + Ww_{k-1}, \qquad \text{D2.5}$$

$$z_k \approx \tilde{z}_k + H\left(x_k - \tilde{x}_k\right) + Vv_k. \qquad \text{D2.6}$$

dove:

- x_k e z_k sono i vettori dello stato attuale e della misurazione attuale;
- $\tilde{x}_k$ e $\tilde{z}_k$ sono i vettori dello stato approssimato e della misurazione approssimata provenienti da D2.3 e D2.4;
- $\hat{x}_k$ è la stima a posteriori dello stato al passo k;
- le variabili casuali w_k e v_k rappresentano rispettivamente il rumore del processo e di misurazione come accade nelle equazioni D.3 e D.4.
- A è una matrice Jacobiana di derivate parziali della funzione f rispetto ad x che vale:

$$A_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}\left(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0\right)$$

- W è una matrice Jacobiana di derivate parziali della funzione f rispetto alla variabile w che vale:

$$W_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}\left(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0\right)$$

- H è una matrice Jacobiana di derivate parziali della funzione h rispetto ad x che vale:

$$H_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}\left(\tilde{x}_k, 0\right)$$

- V è una matrice Jacobiana di derivate parziali della funzione h rispetto a v che vale:

$$V_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}\left(\tilde{x}_k, 0\right)$$

Si noti che per semplicità di notazione non è stato scritto l'indice del passo temporale k all'apice delle matrici Jacobiane A, W, H, e V anche se esse variano ad ogni istante temporale.

Ora si definisce una nuova notazione per l'errore previsto:

$$\tilde{e}_{x_K} \equiv x_k - \tilde{x}_k, \qquad \text{D2.7}$$

e per la misura residua:

$$\tilde{e}_{z_K} \equiv z_k - \tilde{z}_k. \qquad \text{D2.8}$$

Si ricordi che in pratica non si ha accesso ad x_k nella D2.7, che è l'attuale vettore di stato, cioè la quantità che si sta cercando di stimare. D'altra parte, si ha accesso a z_k nella D2.8, che è l'attuale misura che si sta utilizzando per stimare x_k.
Usando le equazioni D2.7 e D2.8 si possono scrivere le equazioni che governano un errore del processo come:

$$\tilde{e}_{x_K} = A\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right) + \varepsilon_k \qquad \text{D2.9}$$

$$\tilde{e}_{z_K} = H\tilde{e}_{x_K} + \eta_k \qquad \text{D2.10}$$

dove ε_k e η_k rappresentano nuove variabili casuali indipendenti aventi media nulla e matrici di covarianza WQW^T, con Q ed R analoghe a quelle definite nelle equazioni D.3 e D.4 rispettivamente.

Si noti che le equazioni D2.9 e D2.10 sono lineari, ed esse somigliano da vicino alle equazioni di misura D.1 e D.2 del filtro di Kalman discreto. Questa motiva l'utilizzo dell'attuale residuo di misura $\tilde{e}_{z_K}$ nella D2.8 ed un secondo (ipotetico) filtro di Kalman per stimare l'errore previsto $\tilde{e}_{x_K}$ dato dall'equazione D2.9. Questa stima, chiamata $\hat{e}_k$, può essere usata nell'equazione D2.7 per ottenere la stima dello stato a posteriori per processo iniziale non lineare come:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + \hat{e}_k \qquad \text{D2.11}$$

Le variabili casuali di D2.9 e D2.10 hanno approssimativamente le seguenti distribuzioni di probabilità :

$$p\left(\tilde{e}_{x_K}\right) \approx N\left(0, E\left[\tilde{e}_{x_K}\tilde{e}_{x_K}{}^T\right]\right)$$

$$p\left(\varepsilon_k\right) \approx N\left(0, WQ_kW^T\right)$$

$$p\left(\eta_k\right) \approx N\left(0, VR_kV^T\right)$$

Date queste approssimazioni e considerando come valore previsto $\hat{e}_k$ pari a zero, l'equazione del filtro di Kalman usata per stimare $\hat{e}_k$ è:

$$\hat{e}_k = K_k\tilde{e}_{z_K} \qquad \text{D2.12}$$

Sostituendo l'equazione D2.12 nella D2.11 e e facendo uso della D2.8 si vedrà che non è necessario un secondo (ipotetico) filtro di Kalman:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k \tilde{e}_{z_K} = \tilde{x}_k + K_k \left(z_k - \tilde{z}_k \right) \qquad \text{D2.13}$$

L'equazione D2.13 può essere usata per gli aggiornamenti di misura nel filtro di Kalman esteso, con $\tilde{x}_k$ e $\tilde{z}_k$ provenienti dalle equazioni D2.3 e D2.4, ed il guadagno di Kalman K_k proveniente dalla D.11 con l'appropriata sostituzione per la covarianza dell'errore di misura.

L'insieme completo delle equazioni dell'EKF viene presentato di seguito. Si noti che è stato sostituito $\tilde{x}_k$ con $\hat{x}_k^-$ per rimanere coerenti con la precedente notazione, e che viene aggiunto "k" al pedice delle matrici Jacobiane A, W, H, e V, per rinforzare la notazione in merito al fatto che esse variano in funzione del tempo (e pertanto devono essere ricomputate istante per istante). Le equazioni di aggiornamento temporale sono:

$$\hat{x}_k^- = f\left(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0 \right) \qquad \text{D2.14}$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \qquad \text{D2.15}$$

Come accade nel filtro di Kalman discreto, le equazioni di aggiornamento temporale D2.14 e D2.15 proiettano la stima dello stato e della covarianza dal precedente passo temporale (discreto) k-1 all'attuale passo k. Ed ancora una volta la funzione f dell'equazione D2.14 proviene dalla D2.3, A_k e W_k sono matrici di processo Jacobiane al passo k, e Q_k è la covarianza del rumore del processo al passo k. Le equazioni che aggiornano le misure sono:

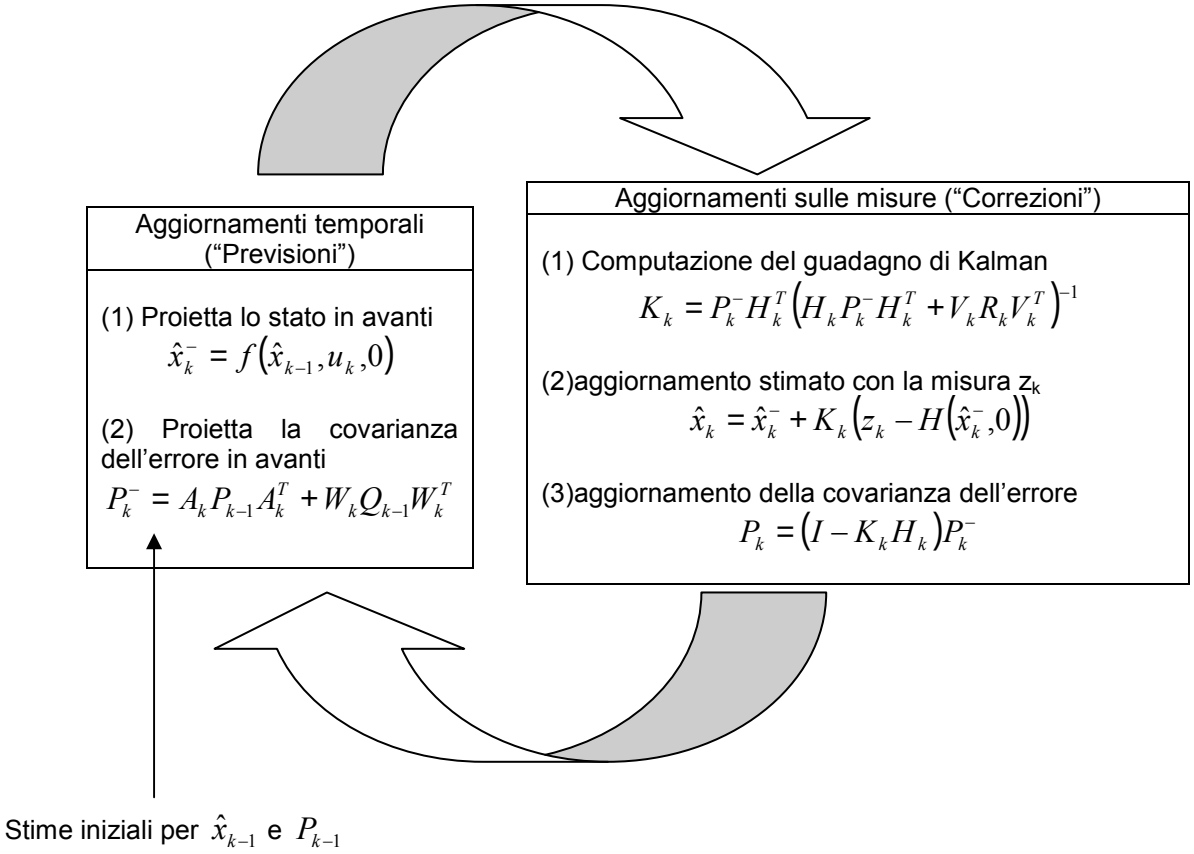
$$K_k = P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T \right)^{-1} \qquad \text{D2.16}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \left(z_k - H\left(\hat{x}_k^-, 0 \right) \right) \qquad \text{D2.17}$$

$$P_k = \left(I - K_k H_k \right) P_k^- \qquad \text{D2.18}$$

Come accade nel filtro di Kalman discreto, le equazioni che aggiornano le misure D2.16, D2.17, D2.18 correggono la stima dello stato e della covarianza con la misura z_k. Di nuovo la funzione h nella D2.17 proviene dalla D2.4, H_k e V_k sono matrici di misura Jacobiane al passo k, ed R_k è la covarianza del rumore di misura dell'equazione D.4 al passo k. (Si noti che al pedice di R è stata posta k consentendo il fatto che essa cambi dopo ogni misura.)

Le operazioni fondamentali dell'EFK sono le stesse del filtro di Kalman discreto, come peraltro si può notare osservando la figura:



Un'importante caratteristica dell'EKF è che lo Jacobiano H_k nell'equazione per il guadagno di Kalman K_k serve per propagare correttamente o "migliorare" solo la componente rilevante dell'informazione di misura.